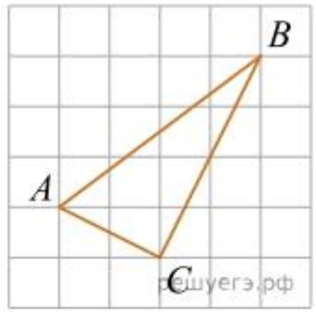
Задания Тип 2.

2. Тип 2 № 654451

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



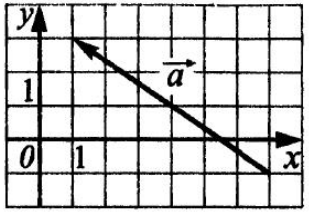
Решение. Найдем стороны треугольника по теореме Пифагора (см. рис.), получим: $AC = \sqrt{5},\ BC = \sqrt{20},\ AB = 5.$ Квадрат большей стороны равен сумме квадратов меньших сторон, поэтому по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC — прямоугольный.

Обозначим угол между катетом AC и гипотенузой AB равен α, тогда $AB = \dfrac{AC}{\cos\alpha}$. По определению скалярного произведения получаем:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\alpha = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AC\cos\alpha = AC^2 = 5.$$

Ответ: 5.

2 Вектор $\vec{b}$ получен поворотом на 90° против часовой стрелки вектора $\vec{a}$, изображённого на рисунке. Найдите координату вектора $\vec{b}$ вдоль оси абсцисс.



Ответ: _______________

$\vec{a}\{-6;4\}$

$P_{90^\circ} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \end{cases}$; $|\vec{a}| = \sqrt{52}$; Пусть $\vec{b}\{x;y\}$

$-6x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = 1{,}5x$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{52}$; $x^2 + (1{,}5x)^2 = 52$; $x = \pm 4$

Отв.: $x = -4$

<u>**Задания – Тип 5**</u>

Тип 5

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

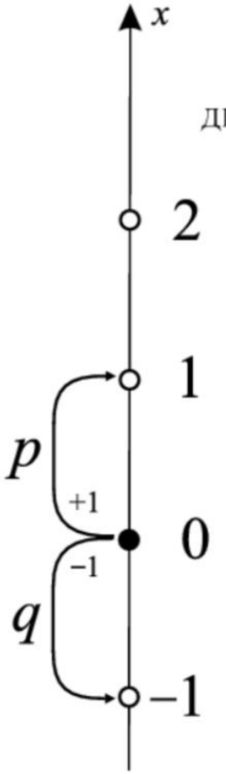
Решение. На первом кубике 3 и 5 очков в каком-либо порядке могут выпасть так: при первом бросании выпало 3, а при втором 5 или наоборот. Всего 2 способа. Вероятность каждого из них равна $\frac{1}{36}$.

Чтобы 3 и 5 очков в каком-то порядке выпало на втором кубике, он первый раз может выпасть четырьмя гранями: 3, 3, 5, 5, а второй раз двумя гранями: 3, 3 или 5, 5, в зависимости от того, сколько очков выпало первый раз. Всего есть $4 \cdot 2 = 8$ способов. Вероятность каждого из них также равна $\frac{1}{36}$.

Таким образом, есть 10 равновероятных вариантов получить 3 и 5, из них второму кубику соответствует 8 вариантов. Следовательно, вероятность того, что был брошен второй кубик равна $\frac{8}{10}$.

Ответ: 0,8.

Тип 5. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью p = 0,8 на единицу больше предыдущего и с вероятностью 1 - p на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?



Решение

Пусть P_0 — вероятность попасть в точку -1, если вначале мы находимся в точке 0.

Так как из точки 0 можно пойти вверх с вероятностью p или вниз с вероятностью $q = 1 - p$ и эти события несовместны, то

$$P_0 = q + p \cdot P_1,$$

где P_1 — вероятность попасть в точку -1, находясь в точке 1.

Так как P_0 — это фактически вероятность из данной начальной точки достигнуть точку на единицу ниже, то $P_1 = P_0 \cdot P_0 = P_0^2$.

Получим квадратное уравнение

$$P_0 = q + p \cdot P_0^2.$$

Перепишем уравнение в виде $p \cdot P_0^2 - P_0 + q = 0$,

его дискриминант $D = 1-4pq = 1-4(1-q)q = 4q^2-4q+1 = (2q-1)^2$.

$$\text{Тогда } P_0 = \frac{1 \pm (2q-1)}{2p}.$$

Отсюда

$$P_0 = \frac{1+2q-1}{2p} = \frac{q}{p} \quad \text{или} \quad P_0 = \frac{1-(2q-1)}{2p} = \frac{2(1-q)}{2p} = 1.$$

При $q \geqslant p$ так как $P_0 \leqslant 1$, то $P_0 = 1$.

В нашем случае $q < p$. Поэтому $P_0 = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1-0{,}8}{0{,}8} = 0{,}25$. *Ответ:* 0,25.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru

Тип 5. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают 2 фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение:

Всего в коробке 25 фломастеров.
В условии не сказано, какой из фломастеров вытащили первым – красный или синий.

Предположим, что первым вытащили красный фломастер. Вероятность этого $\frac{9}{25}$, в коробке остается 24 фломастера, и вероятность вытащить вторым синий равна $\frac{10}{24}$. Вероятность того, что первым вытащили красный, а вторым синий, равна $\frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$.

А если первым вытащили синий фломастер? Вероятность этого события равна $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Вероятность после этого вытащить красный равна $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, вероятность того, что синий и красный вытащили один за другим, равна $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$.

Значит, вероятность вытащить первым красный, вторым синий или первым синий, вторым красный равна $\frac{3}{20} + \frac{3}{20} = 0,3$.

А если их доставали из коробки не один за другим, а одновременно? Вероятность остается такой же: 0,3. Потому что она не зависит от того, вытащили мы фломастеры один за другим, или с интервалом в 2 секунды, или с интервалом в 0,5 секунды… или одновременно!
Ответ: 0,3.

Задания – Тип 10

№10 . Толстовка дороже футболки на 19% и дешевле, чем кеды, на 30%. На сколько процентов кеды дороже футболки?

Футболка – 100%

Толстовка – 119%. Она же составляет 0,7 стоимости кед.

119/0,7 = 170%. Ответ на 70%

№10

Акции компании «Нейросеть» в пятницу выросли на некоторое количество процентов, а в субботу упали на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 25% дешевле, чем при открытии торгов в пятницу. На сколько процентов выросли акции компании в пятницу?

Решение. Обозначим первоначальную стоимость акций за 1. Пусть в пятницу акции компании выросли на $p \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + p \cdot 1$. В субботу акции упали на $p \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + p - p(1 + p)$. В результате они стали стоить на 25% дешевле, чем при открытии торгов в пятницу, то есть 0,75.

Таким образом, получаем уравнение: $1 + p - p(1 + p) = 0,75$, где p = 0,5, что соответствует 50%. Таким образом, акции компании выросли на 50% в пятницу.

Ответ: 50.

Задания – Тип 12

12.

Найдите точку максимума функции **y=11**$^{6x-x^2}$.

Решение. Поскольку функция $y=11^x$ возрастающая, заданная функция достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума выражение $6x-x^2$. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3.

Ответ: 3.

№12. Найти наименьшее значение функции y= 9$^{x\text{^}2-6x+10}$

Для решения воспользуемся свойством монотонности функций y=9^t и y= x^2 -6x +10. Квадратичная функция имеет старший коэффициент a=1. Наименьшее значение ее в вершине. X0=3. 9^3 = 729.

Ответ: 729

12.

Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{8-2x-x^2}$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{8-2x-x^2}=\sqrt{9-(x+1)^2}.$$

Получаем:

$$y=\sqrt{9-(x+1)^2}\leqslant\sqrt{9}=3.$$

Поэтому наибольшее значение функции достигается в точке −1, и оно равно 3.

Ответ: 3.

Задания – Тип 7

Тип 7

Найдите значение выражения $\log_{0,8}3 \cdot \log_3 1,25.$

Решение. Используем формулу

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$$

.

Имеем:

$$\log_{0,8}3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8}1,25 \cdot \log_3 3 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1.$$

Ответ: −1.